4

이차함수와 그래프

타자가 친 야구공은 빠른 속도로 하늘로 올라가다가 어느 시점부터 지면을 향해 떨어지기 시작한다. 이때 날아간 야구공의 높이는 이동한 시간에 관한 이차식으로 나타낼 수 있다.

일차함수, 이차함수와 같은 기본적인 함수 개념의 기원은 고대 바빌로니아라고 할 수 있으나, 여러 가지 운동을 양적으로 표현하려는 함수의 근대적 개념이 정립되기 시작한 것은 17세기부터였다. 뉴턴 역학을 통해 속도 a로 던져 올린 물체의 t초 후의 높이 s는 이차함수 $s=-\frac{1}{2}gt^2+at$ (단, g는 중력가속도)임을 알 수 있다. [출처: H. Eves(이우영 · 신항균 역), 『수학사』]

이 단원에서는 이차함수의 뜻을 이해하고 이차함수의 그래프와 그 성질을 배운다.

준비해 볼까?

1 다음 함수에 대하여 $f(-1)$, $f(2)$의 값을 각각 구하시오.

(1) $f(x)=5x-3$　　(2) $f(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

2 다음 □ 안에 알맞은 자연수를 써넣으시오.

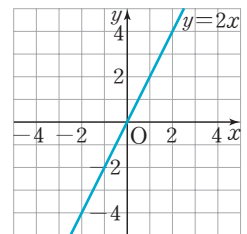
(1) $x^2+2x+1=(x+\square)^2$

(2) $x^2-6x+9=(x-\square)^2$

3 오른쪽 그림은 일차함수 $y=2x$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=2x-3$

(2) $y=2x+2$

이야기로 여는 수학

4.0 갈매기의 먹이 사냥

우리는 동물의 행동을 관찰하여 그들이 도구를 사용하거나 과학적 현상을 이용하는 것을 살펴볼 수 있습니다. 예를 들어 원숭이는 높은 곳의 열매를 따기 위해 막대기를 이용하고, 까마귀는 병에 담긴 물을 먹기 위해 병 속에 돌멩이를 채우기도 합니다.

또한, 생태학자들에 따르면 갈매기는 바닷가에서 조개를 찾아 입에 물고 육지 쪽으로 날아올라 육지의 돌이나 바위에 떨어뜨립니다. 만약 떨어진 조개가 깨지지 않으면 갈매기는 더 높은 곳으로 날아올라 떨어뜨립니다. 이는 자유 낙하하는 물체의 이동 거리는 시간의 제곱에 비례하므로 더 높은 곳에서 조개를 떨어뜨릴수록 조개가 깨질 확률이 높아지기 때문입니다. 하지만 너무 높은 곳에서 조개를 떨어뜨려 깨는 경우 갈매기가 육지로 내려오기 전에 인근에 있는 다른 먹이 경쟁자들이 조개를 빼앗을 수 있기 때문에 갈매기는 조개의 무게나 크기에 맞추어 조개가 깨질 만큼의 적절한 높이로 날아오른 다음 떨어뜨립니다.

이와 같이 갈매기의 먹이를 구하는 활동에서도 우리는 과학적 원리를 찾아볼 수 있습니다.

[출처: John L. Maron, 「Shell−Dropping Behavior of Western Gulls (Larus occidentalis)」]

- 공중에서 조개가 t초 동안 떨어진 거리를 $5t^2$ m라고 할 때, 이 조개가 3초, 4초 동안 떨어진 거리는 각각 몇 m인지 구해 보자.

태도 및 실천

- 우리 주변에서 한 양의 제곱에 비례하여 다른 양이 변하는 관계를 살펴볼 수 있는 예를 찾아 말해 보자.

4.1 이차함수의 뜻

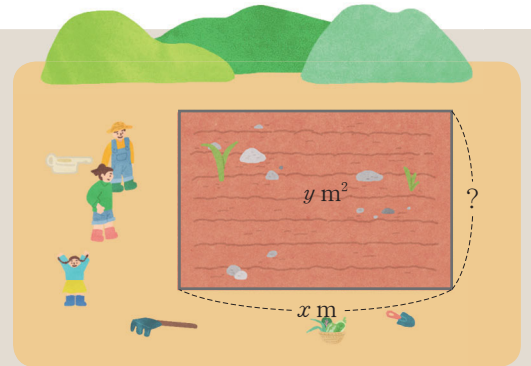
학|습|목|표

• 이차함수의 의미를 이해한다.

학|습|요|소

• 이차함수

직사각형 모양의 텃밭 만들기

찬민이네 가족은 둘레의 길이가 20 m인 직사각형 모양의 텃밭을 만들려고 합니다. 직사각형 모양의 텃밭의 가로의 길이와 텃밭의 넓이 사이의 관계를 생각해 봅시다.

활동 1 가로의 길이가 6 m일 때, 세로의 길이를 구해 보자.

활동 2 가로의 길이가 x m일 때, 세로의 길이를 구해 보자.

활동 3 가로의 길이가 x m일 때의 텃밭의 넓이를 y m^{2}라고 하자. 이때 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자.

생각 1

텃밭의 가로의 길이와 넓이 사이에는 어떤 관계가 있나요?

생각 열기에서 텃밭의 가로의 길이가 x m일 때의 세로의 길이는 $\frac{1}{2}(20-2x)=10-x$(m)이다. 따라서 텃밭의 넓이 y m^{2}를 구하면

$$y=x(10-x)=-x^2+10x$$

이므로 $y=-x^2+10x$가 성립하고, y는 x에 관한 이차식으로 나타내어진다.

이때 x와 y 사이의 관계를 나타내는 식에서 텃밭의 가로의 길이 x의 값을 알면 그 때의 텃밭의 넓이 y의 값을 알 수 있다.

생각 2

y가 x에 관한 이차식으로 나타내어질 때, 함수 $y=f(x)$를 무엇이라고 하나요?

$y=-x^2+10x$에서 y는 x에 관한 이차식이고, x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지므로 y는 x의 함수이다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서

$$y=ax^2+bx+c \ (a, b, c\text{는 상수}, a\neq 0)$$

와 같이 $f(x)$가 x에 관한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수를 x에 관한 **이차함수**라고 한다.

| **참고** | 특별한 말이 없으면 x의 값의 범위는 실수 전체로 생각한다.

예 (1) 함수 $y=x^2$, $y=2x^2-5x+1$은 y가 x에 관한 이차식으로 나타내어지므로 이차함수이다.

(2) 함수 $y=5x-7$, $y=\frac{10}{x}$은 $5x-7$, $\frac{10}{x}$이 x에 관한 이차식이 아니므로 이차함수가 아니다.

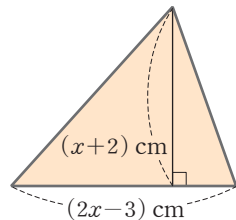
문제 1 다음에서 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $y=100-2x$

(2) $y=\frac{2}{3}x^2-1$

(3) $y=\frac{3}{5}x+2$

(4) $y=(x+3)(x-1)$

오른쪽 그림과 같이 밑변의 길이가 $(2x-3)$ cm이고, 높이가 $(x+2)$ cm인 삼각형의 넓이를 y cm^2라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내시오. 또, y가 x에 관한 이차함수인지 말하시오.

풀이 | x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면

$$y=\frac{1}{2}(2x-3)(x+2)$$
$$=\frac{1}{2}(2x^2+x-6)$$
$$=x^2+\frac{1}{2}x-3$$

이때 $x^2+\frac{1}{2}x-3$은 x에 관한 이차식이므로 $y=x^2+\frac{1}{2}x-3$은 이차함수이다.

답 $y=x^2+\frac{1}{2}x-3$, 이차함수이다.

문제 2 다음에서 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내고, y가 x에 관한 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) 윗변의 길이가 $(x+3)$ cm, 아랫변의 길이가 $(2x-1)$ cm이고, 높이가 4 cm인 사다리꼴의 넓이는 y cm^{2}이다.

(2) 반지름의 길이가 x cm인 원의 둘레의 길이는 y cm이다.

(3) 꼭짓점의 개수가 x인 다각형의 대각선의 개수는 y이다.

(4) 가로의 길이가 $(2x+1)$ cm, 세로의 길이가 $(x-2)$ cm인 직사각형의 넓이는 y cm^{2}이다.

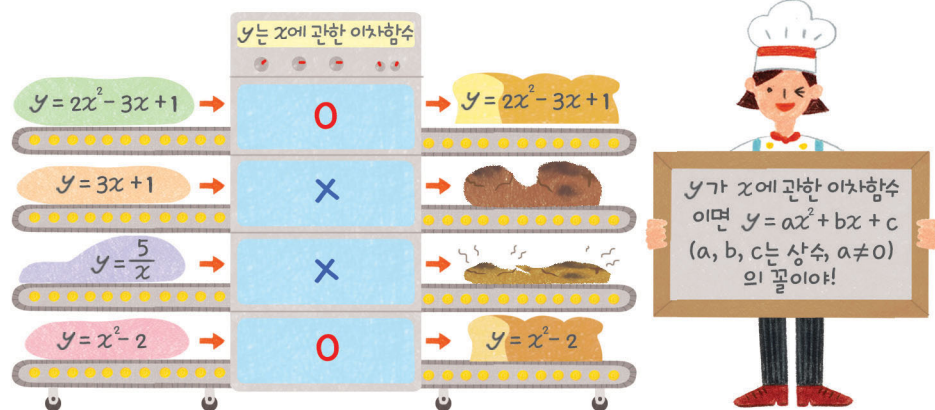
생각을 나누는 **의사소통**

함수 $y=2(x-1)^2-2x^2+4$가 이차함수인지 아닌지 친구와 이야기해 보자.

동료 평가

- 친구의 판단과 그 이유는 적절한가?
- 친구는 나의 설명을 잘 경청하였는가?

수학 집 짓기

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> 함수 $y=f(x)$에서
> $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)
> 와 같이 $f(x)$가 x에 관한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수를 x에 관한 ☐라고 한다.

2

다음에서 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $y=2(x-1)+x$ (2) $y=-2x^2+1$

(3) $y=x(x+3)-x^2$ (4) $y=-3x(2-x)$

3

다음에서 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내고, y가 x에 관한 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) 연속한 두 자연수 x, $x+1$의 곱은 y이다.

(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이는 y cm이다.

(3) 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 겉넓이는 y cm^{2}이다.

(4) 빗변이 아닌 한 변의 길이가 x cm인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 y cm이다.

4

이차함수 $f(x)=2x^2-3x+1$에 대하여 다음 함숫값을 구하시오.

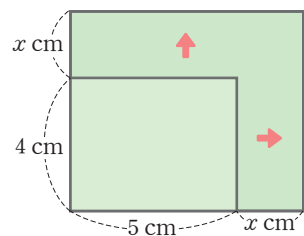
(1) $f(0)$ (2) $f(1)$

(3) $f(-2)$ (4) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

5 추론

이차함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=x^2+ax+2a-3$이고 $f(-1)=2$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

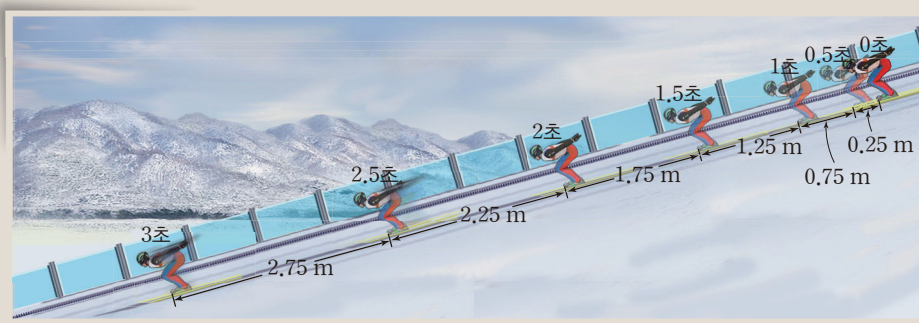
오른쪽 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 각각 5 cm, 4 cm인 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 똑같이 x cm만큼 늘였을 때, 새로 만들어진 직사각형의 넓이를 y cm^{2}라고 하자. 이때 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타낸 후 y가 x에 관한 이차함수인지 말하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

4.2 이차함수 $y=x^2$, $y=-x^2$의 그래프

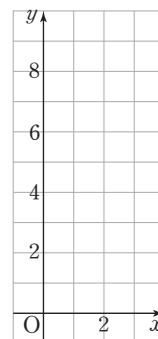
학|습|목|표

- 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.
- 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

생각 열기

스키 점프 선수가 움직인 시간과 이동한 거리

다음 그림은 스키 점프대에서 미끄러져 내려가는 스키 점프 선수의 위치를 0.5초 간격으로 나타낸 것입니다. 이때 스키 점프 선수가 움직인 시간과 이동한 거리 사이의 관계를 생각해 봅시다.

활동 1 스키 점프 선수가 x초 동안 이동한 거리를 y m라고 할 때, 다음 표를 완성해 보자.

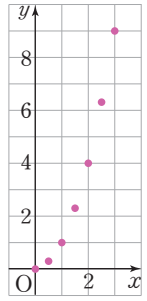
x(초)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y(m)							

활동 2 **활동 1**에서 구한 x와 y의 값을 각각 순서쌍 (x, y)로 나타내고, 그 순서쌍을 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내 보자.

생각 1

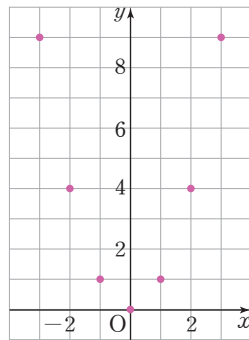
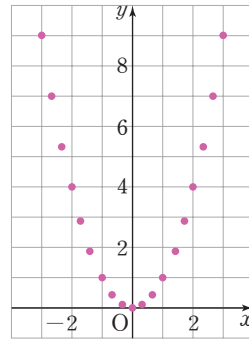
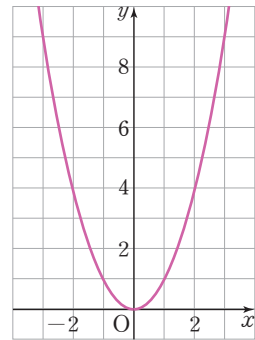
스키 점프 선수가 x초 동안 이동한 거리를 y m라고 할 때, $y=f(x)$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?

생각 열기에서 스키 점프 선수가 움직인 시간 x의 값이 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3일 때, 이동한 거리 y의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x(초)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y(m)	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9

앞의 표에서 x, y의 값으로 이루어진 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y=x^2$이 성립하므로 오른쪽 그림은 x의 값이 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3일 때, 함수 $y=x^2$의 그래프이다.

생각 2 **이차함수 $y=x^2$에서 x의 값의 범위가 실수 전체이면 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?**

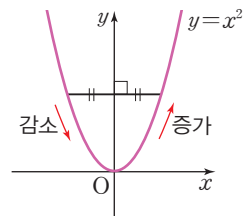
이차함수 $y=x^2$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하여 순서쌍 (x, y)로 나타내면 $\cdots$, $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, $\cdots$이므로 이를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 〈그림 1〉과 같다. 이때 〈그림 2〉와 같이 x의 값 사이의 간격을 점점 작게 하여 x의 값의 범위를 실수 전체로 하면 그래프는 〈그림 3〉과 같이 매끄러운 곡선이 된다.

이 곡선이 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉

위의 〈그림 3〉에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭임을 알 수 있다. 또한, $x<0$일 때에는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $x>0$일 때에는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가함을 알 수 있다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프

1. 원점을 지나며 아래로 볼록한 곡선이다.
2. y축에 대칭이다.
3. $x<0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.
   $x>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.
4. 원점을 제외한 모든 부분은 x축보다 위쪽에 있다.

문제 1 이차함수 $y=x^2$에 대하여 $x=\frac{3}{2}$일 때와 $x=-\frac{3}{2}$일 때의 함숫값을 각각 구하고, 그 값을 비교하시오.

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 그려 보자.

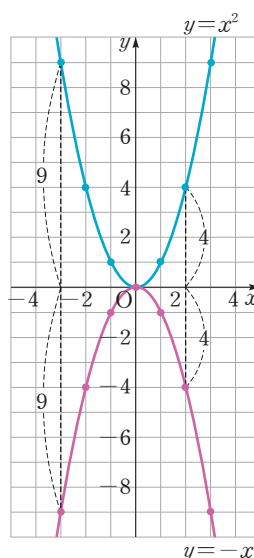
두 이차함수 $y=x^2$과 $y=-x^2$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

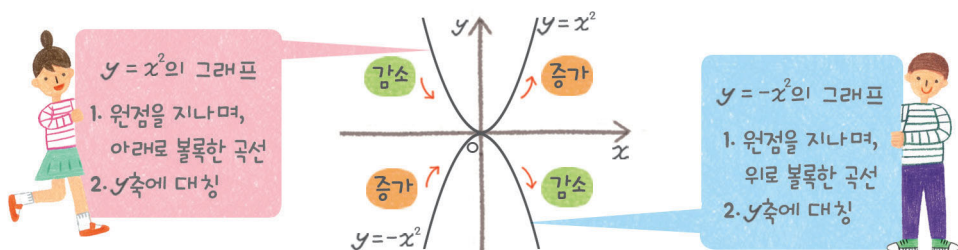
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

위의 표에서 같은 x의 값에 대응하는 x^2과 $-x^2$의 값은 절댓값은 항상 같고 부호는 서로 반대이므로 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 곡선이다.

따라서 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점을 지나고 위로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

또한, 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 $x<0$일 때에는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x>0$일 때에는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

| **참고** | 이차함수 $y=-x^2$의 그래프에서 원점을 제외한 모든 부분은 x축보다 아래쪽에 있다.

문제 2 이차함수 $y=-x^2$에 대하여 $x=4$일 때와 $x=-4$일 때의 함숫값을 각각 구하고, 그 값을 비교하시오.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음은 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 대한 설명이다. ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 원점을 지나며 아래로 ☐한 곡선이다.

(2) y축에 ☐이다.

(3) $x<0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 ☐하고, $x>0$이면 x의 값이 증가할 때, y의 값도 ☐한다.

2

이차함수 $y=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) x의 값이 1, 2, 3일 때, y의 값을 차례로 구하시오.

(2) x의 값이 -1, -2, -3일 때, y의 값을 차례로 구하시오.

(3) x의 값의 범위가 실수 전체일 때, y의 값의 범위를 구하시오.

3 추론

다음 보기에서 이차함수 $y=-x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

보기
ㄱ. x축과 한 점에서 만난다.
ㄴ. 아래로 볼록한 곡선이다.
ㄷ. x축에 대칭이다.
ㄹ. 제3사분면과 제4사분면을 지난다.

4 과정을 다지는 문제

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프가 점 $(4, k)$를 지날 때, k의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

수학 이야기

수학과 생물학

21세기 제4차 산업혁명 시대에 각광받는 직업 중 하나는 수학을 이용하여 과학 현상의 원리를 설명하는 수학자이다. 이러한 수학자는 수학을 이용하여 과학 현상의 결과를 예측하고, 그 결과를 수학적으로 설명함으로써 실험에 의해 정립된 이론을 뒷받침해 준다. 이와 같이 수학을 이용하는 과학 분야는 점차 확대되고 있다. 특히, 수리 생물학은 수학 이론을 생물학의 체계화에 적용하고 그 체계의 기초가 되는 방법론을 다루는 학문이다. 수리 생물학은 생물의 진화나 기원에 관한 이론적인 분야뿐만 아니라 생태학, 생리학, 의학, 농학, 수산학 등 생물과 관련된 분야에도 널리 적용되고 있다.

[출처: 이언 스튜어트(안지민 역), 『생명의 수학: 21세기 수학과 생물학의 혁명』]

4.3 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

학습 목표

- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있다.
- 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해한다.

학습 요소

- 포물선, 축, 꼭짓점

x^2과 $2x^2$ 사이의 관계

다음을 보고, 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 그리는 방법에 대하여 생각해 봅시다.

활동 1 이차함수 $y=2x^2$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하여 다음 표를 완성해 보자.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$								$\cdots$

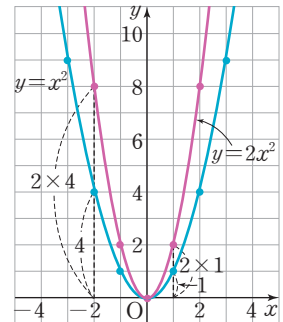
활동 2 **활동 1**의 결과를 이용하여 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=2x^2$에서 x의 값이 같을 때의 함숫값을 비교해 보자.

생각 1

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 어떻게 그릴 수 있나요?

생각 열기에서 두 이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$에 대하여 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

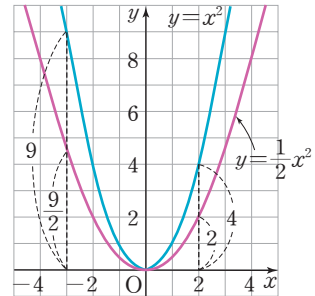
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$

이때 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어 두 이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 또한, 위의 표에서 x의 값이 같을 때, 이차함수 $y=2x^2$의 함숫값은 $y=x^2$의 함숫값의 2배임을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 2배로 하는 점을 연결하여 그릴 수 있다. 이때 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프와 마찬가지로 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

일반적으로 $a>0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 a배로 하는 점을 연결하여 그릴 수 있다.

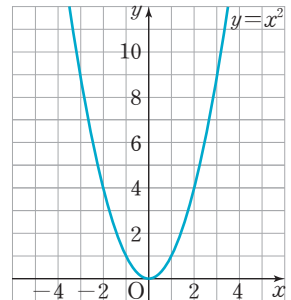
이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그리시오.

풀이 | 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 $\frac{1}{2}$배로 하는 점을 연결하여 그리면 된다.

따라서 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

답 풀이 참조

문제 1 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=3x^2$

(2) $y=\frac{1}{3}x^2$

생각 2 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 어떻게 그릴 수 있나요?

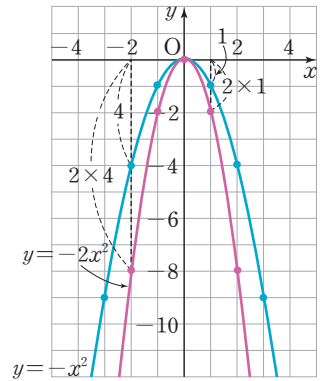
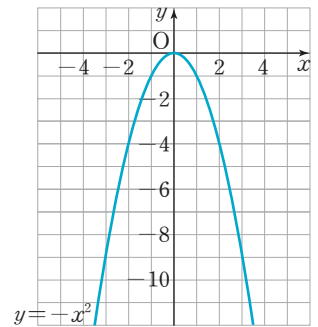
이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 그려 보자.

두 이차함수 $y=-x^2$과 $y=-2x^2$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$
$-2x^2$	$\cdots$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	$\cdots$

앞의 표에서 x의 값이 같을 때, 이차함수 $y=-2x^2$의 함숫값은 $y=-x^2$의 함숫값의 2배임을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=-x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 2배로 하는 점을 연결하여 그릴 수 있다.

이때 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프와 마찬가지로 원점을 지나고 위로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

문제 2 오른쪽 그림은 이차함수 $y=-x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-3x^2$

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$

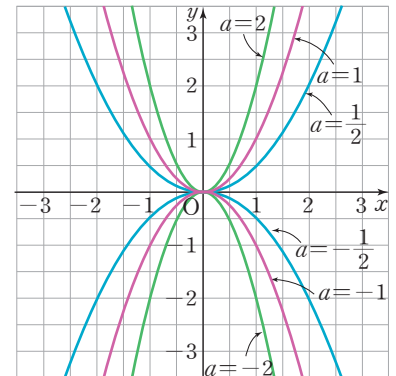
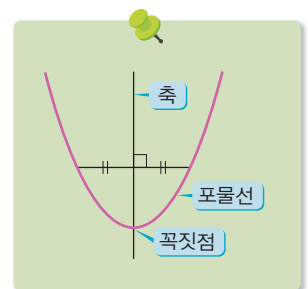
$a<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=-ax^2$의 그래프의 각 점에 대하여 x축에 대칭인 점을 연결하여 그릴 수도 있다.

생각 3 **이차함수 $y=ax^2$ $(a\neq0)$에서 a의 값에 따라 그 그래프는 어떻게 달라지나요?**

이차함수 $y=ax^2$에서 a의 값이 -2, -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2일 때, 그 그래프를 한 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

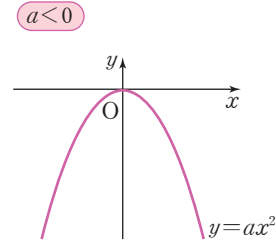
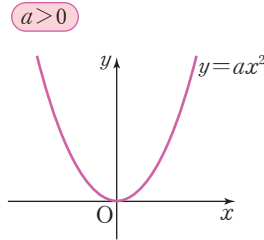
또, a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아지고, $y=ax^2$의 그래프와 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대칭이다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 한다. 포물선은 선대칭도형이고, 그 대칭축을 포물선의 **축**이라고 하며, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

어떤 직선으로 접어서 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭도형이라 하고, 그 직선을 대칭축이라고 한다.

앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

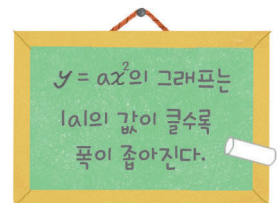
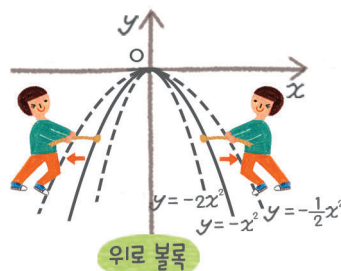
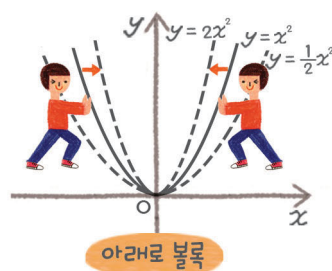
1. 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
2. $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.
3. $|a|$의 값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
4. $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

$a>0$

$a<0$

문제 3 다음 이차함수에 대하여 물음에 답하시오.

(가) $y=5x^2$	(나) $y=-\frac{2}{3}x^2$	(다) $y=-5x^2$
(라) $y=\frac{4}{3}x^2$	(마) $y=\frac{3}{4}x^2$	(바) $y=-2x^2$

(1) 그래프의 모양이 위로 볼록한 것을 모두 찾으시오.
(2) 그래프의 폭이 가장 넓은 것을 찾으시오.
(3) 그래프가 x축에 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

수학 집 짓기

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

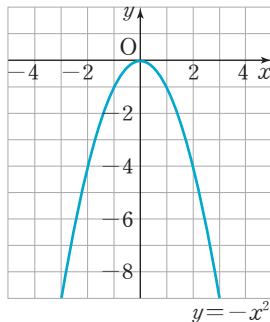
(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $a>0$이면 ☐로 볼록하고, $a<0$이면 ☐로 볼록하다.

(2) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 ☐이라고 한다.

(3) 포물선은 선대칭도형이고, 그 대칭축을 포물선의 ☐이라고 하며, 포물선과 축의 교점을 포물선의 ☐이라고 한다.

2

오른쪽 그림은 이차함수 $y=-x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$의 그래프를 그리시오.

3

다음 이차함수에 대하여 물음에 답하시오.

(가) $y=4x^2$	(나) $y=2x^2$	(다) $y=\frac{1}{2}x^2$
(라) $y=-3x^2$	(마) $y=-\frac{1}{2}x^2$	(바) $y=-\frac{1}{3}x^2$

(1) 그래프가 x축에 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

(2) 그래프의 폭이 가장 좁은 것을 찾으시오.

(3) $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 것을 모두 찾으시오.

4

다음 보기에서 이차함수 $y=3x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. y축을 축으로 한다.

ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

ㄷ. 아래로 볼록한 포물선이다.

ㄹ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

5 추론

다음 조건을 만족시키는 음의 정수 a는 모두 몇 개인지 구하시오.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=-2x^2$의 그래프보다 폭이 더 좁고, $y=-6x^2$의 그래프보다 폭이 더 넓다.

6 과정을 다지는 문제

이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 2)$, $(4,\ b)$를 지날 때, ab의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

4.4 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

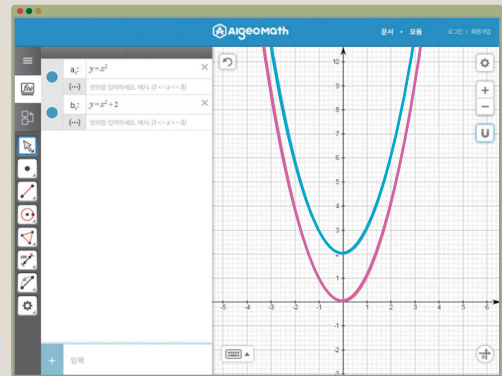
학 | 습 | 목 | 표

- 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 수 있다.
- 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프의 성질을 이해한다.

생각 열기

컴퓨터 프로그램을 이용한 이차함수의 그래프 관찰 (1)

오른쪽 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+2$의 그래프를 그린 것입니다. 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+2$의 그래프 사이의 관계를 생각해 봅시다.

알지오매스(AlgeoMath)(https://www.algeomath.kr)에서 이차함수의 그래프의 성질을 탐색할 수 있다.

활동 1 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+2$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 다음 표를 완성해 보자.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$								$\cdots$
x^2+2	$\cdots$								$\cdots$

활동 2 **활동 1**에서 x의 값이 같을 때의 두 함숫값을 비교하여 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 이동하면 되는지 설명해 보자.

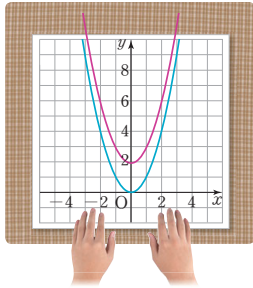
생각 1 **이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프를 어떻게 그릴 수 있나요?**

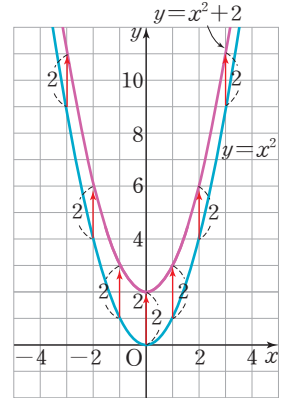
생각 열기에서 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+2$에 대하여 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
x^2+2	$\cdots$	11	6	3	2	3	6	11	$\cdots$

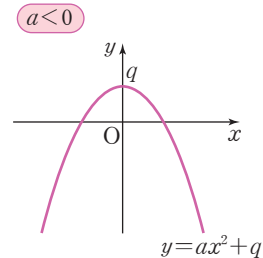
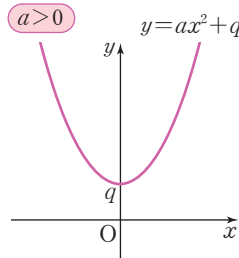
앞의 표에서 같은 x의 값에 대응하는 x^2+2의 값은 x^2의 값보다 2만큼 더 크다는 것을 알 수 있다.

즉, x의 값이 같을 때, 이차함수 $y=x^2+2$의 함숫값은 이차함수 $y=x^2$의 함숫값보다 2만큼 더 크다.

투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 그린 후 투명 종이를 위로 평행이동한다.

따라서 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프는 y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

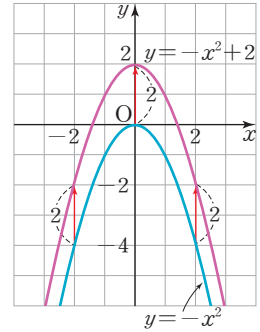
1. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
2. y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

| **참고** | 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 평행이동한 것이므로 두 그래프의 모양은 같다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=\frac{3}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

(1) $y=\frac{3}{2}x^2+4$

(2) $y=\frac{3}{2}x^2-5$

이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프를 그리고, 축과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이 | 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.

답 축: y축, 꼭짓점의 좌표: $(0,\ 2)$

문제 2 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=2x^2-1$

(2) $y=-2x^2+3$

스스로 해결하기

1

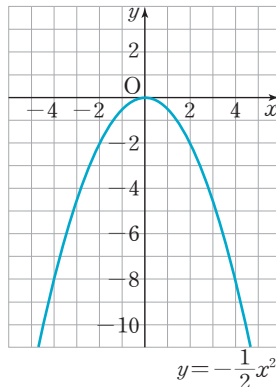
다음은 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프에 대한 설명이다. ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 ☐축의 방향으로 q 만큼 ☐한 것이다.

(2) ☐축을 축으로 한다.

(3) 꼭짓점의 좌표는 ☐이다.

2

오른쪽 그림은 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-3$

$y=-\frac{1}{2}x^2$

3

다음 이차함수의 그래프를 y축의 방향으로 [ ] 안의 값만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

(1) $y=-4x^2$ $[3]$

(2) $y=7x^2$ $[-2]$

(3) $y=-\frac{1}{6}x^2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

(4) $y=\frac{2}{5}x^2$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

4

다음 이차함수의 그래프의 축과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=3x^2+1$

(2) $y=4x^2-2$

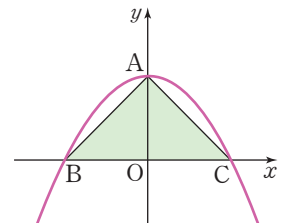
(3) $y=-\frac{3}{4}x^2+6$

(4) $y=-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{3}$

5 추론

이차함수 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 점 $(5,\ 2)$를 지나고 꼭짓점의 좌표는 $(b,\ c)$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

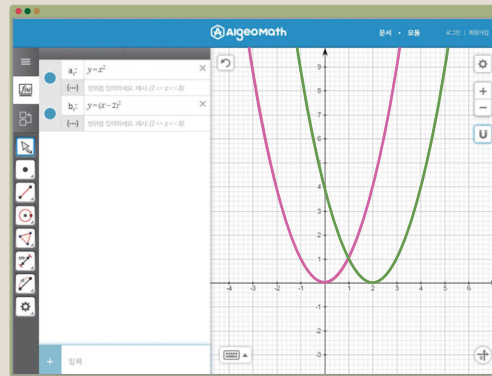
오른쪽 그림은 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다. 이 그래프의 꼭짓점을 A, 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, 두 점 B, C의 좌표를 각각 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

4.5 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

학 | 습 | 목 | 표

- 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 그릴 수 있다.
- 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 성질을 이해한다.

생각 열기

컴퓨터 프로그램을 이용한 이차함수의 그래프 관찰 (2)

다음 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$의 그래프를 그린 것입니다. 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$의 그래프 사이의 관계를 생각해 봅시다.

활동 1 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 다음 표를 완성해 보자.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
x^2	$\cdots$										$\cdots$
$(x-2)^2$	$\cdots$										$\cdots$

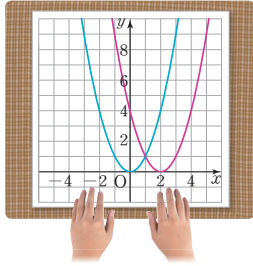
활동 2 **활동 1**에서 x^2과 $(x-2)^2$의 값이 같을 때의 x의 값을 비교하여 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 이동하면 되는지 설명해 보자.

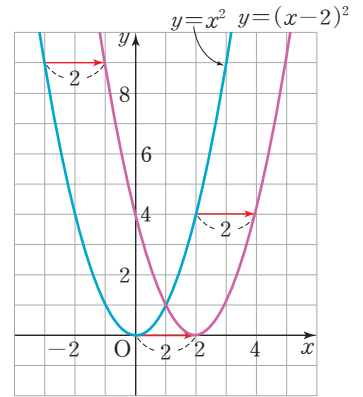
생각 1 **이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프를 어떻게 그릴 수 있나요?**

생각 열기에서 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$에 대하여 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	16	25	$\cdots$
$(x-2)^2$	$\cdots$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$

위의 표에서 x의 값이 -3, -2, -1, 0, 1, $\cdots$일 때의 x^2의 값과 x의 값이 -1, 0, 1, 2, 3, $\cdots$일 때의 $(x-2)^2$의 값은 각각 같음을 알 수 있다.

투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 그린 후 투명 종이를 오른쪽으로 평행이동한다.

따라서 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

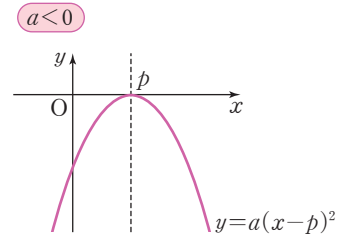
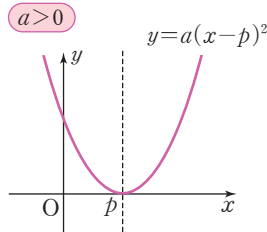
이때 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 $(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

1. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

2. 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

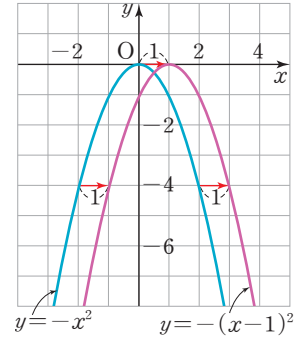
$a>0$

$a<0$

문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

(1) $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$

(2) $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$

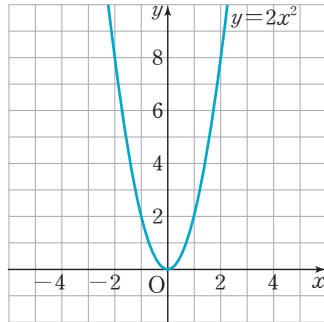
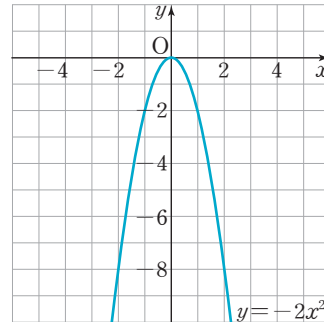
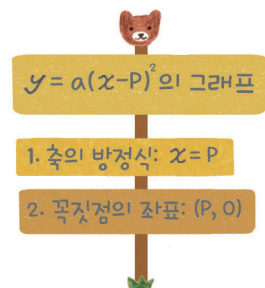
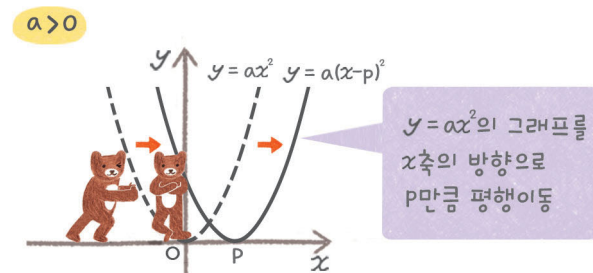
이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x-1)^2$의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이 | 이차함수 $y=-(x-1)^2$의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이차함수 $y=-(x-1)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$을 축으로 하고, 점 $(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.

답 축의 방정식: $x=1$, 꼭짓점의 좌표: $(1, 0)$

문제 2 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=2(x+1)^2$

(2) $y=-2(x-3)^2$

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

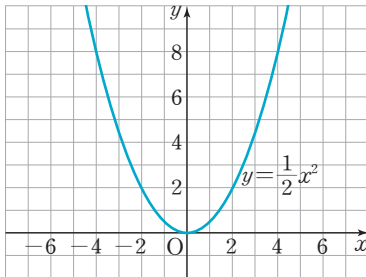
다음은 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프에 대한 설명이다. ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 ☐만큼 평행이동한 것이다.

(2) 직선 ☐를 축으로 한다.

(3) 꼭짓점의 좌표는 ☐이다.

2

아래 그림은 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$　　(2) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$

3

다음 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 [ ] 안의 값만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

(1) $y=5x^2$ $\left[\frac{3}{2}\right]$　　(2) $y=-3x^2$ $[5]$

(3) $y=\frac{1}{4}x^2$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$　　(4) $y=-\frac{4}{3}x^2$ $[-2]$

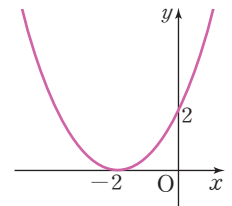
4

다음 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

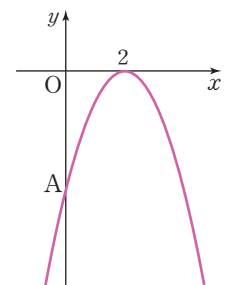
(1) $y=3(x+4)^2$　　(2) $y=-2(x+5)^2$

(3) $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2$　　(4) $y=5\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

5 추론

오른쪽 그림은 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동한 그래프이다. a의 값을 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

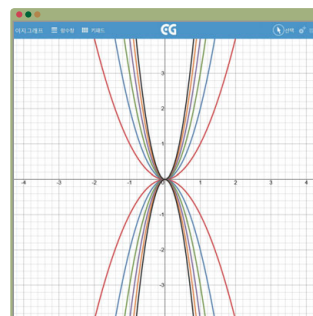
오른쪽 그림은 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다. 이 그래프와 y축과의 교점 A의 좌표를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

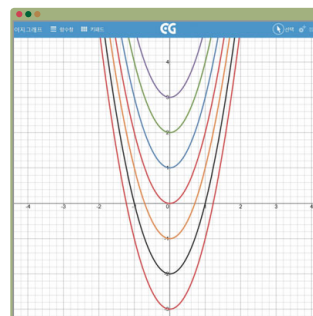
수학 실험실

컴퓨터 프로그램을 이용하여 그래프의 성질 확인하기

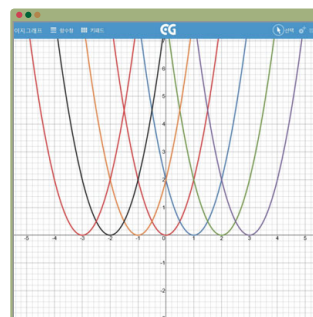
컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수 $y=ax^2$, $y=2x^2+q$, $y=2(x-p)^2$에서 a, q, p의 값에 따라 그 그래프는 어떻게 변하는지 관찰해 보자.

알지오매스 또는 이지그래프 (http://www.ebsmath.co.kr/easyGraph)에서 이차함수의 그래프의 성질을 탐색할 수 있다.

❶ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질 파악하기

a의 값을 변화시키면서 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록하다. 또, 두 이차함수 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대칭이고, $|a|$의 값이 클수록 그래프의 폭이 좁아지는 것을 확인할 수 있다.

❷ 이차함수 $y=2x^2+q$의 그래프의 성질 파악하기

q의 값을 변화시키면서 이차함수 $y=2x^2+q$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. $q>0$이면 그래프의 꼭짓점이 x축보다 위쪽에, $q<0$이면 그래프의 꼭짓점이 x축보다 아래쪽에 있다. 또, $|q|$의 값이 클수록 그래프의 꼭짓점이 x축에서 멀어지는 것을 확인할 수 있다.

❸ 이차함수 $y=2(x-p)^2$의 그래프의 성질 파악하기

p의 값을 변화시키면서 이차함수 $y=2(x-p)^2$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. $p>0$이면 그래프의 축이 y축의 오른쪽에, $p<0$이면 그래프의 축이 y축의 왼쪽에 있다. 또, $|p|$의 값이 클수록 그래프의 축이 y축에서 멀어지는 것을 확인할 수 있다.

활동

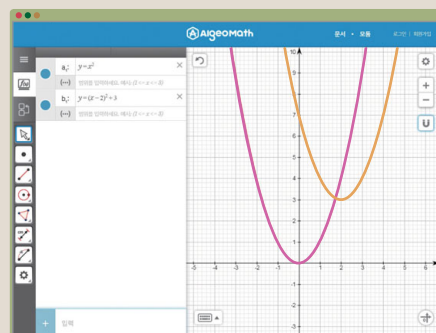
1. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 세 이차함수 $y=3x^2$, $y=3x^2+5$, $y=3(x-1)^2$의 그래프를 각각 나타내 보자.
2. 이차함수 $y=3x^2$과 $y=3x^2+5$의 그래프 사이의 관계와 이차함수 $y=3x^2$과 $y=3(x-1)^2$의 그래프 사이의 관계를 각각 말해 보자.

4.6 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

학 | 습 | 목 | 표

- 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있다.
- 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 성질을 이해한다.

컴퓨터 프로그램을 이용한 이차함수의 그래프 관찰 (3)

오른쪽 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2+3$의 그래프를 그린 것입니다. 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2+3$의 그래프 사이의 관계를 생각해 봅시다.

활동 1 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 말해 보자.

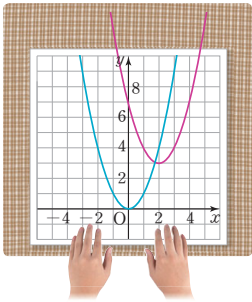
활동 2 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 $y=(x-2)^2$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인지 말해 보자.

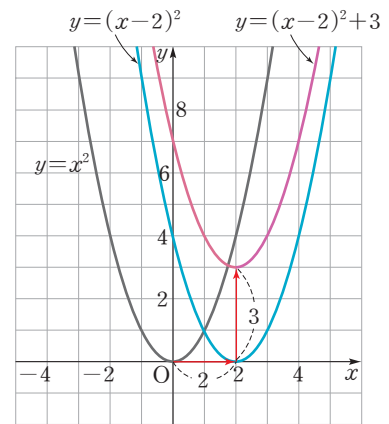
활동 3 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 어떻게 평행이동하면 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프와 겹치는지 말해 보자.

생각 1 **이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프를 어떻게 그릴 수 있나요?**

생각 열기에서 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

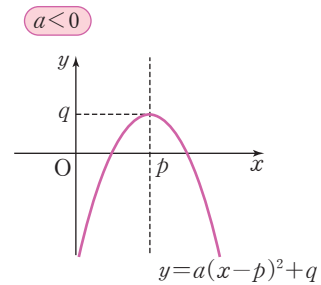
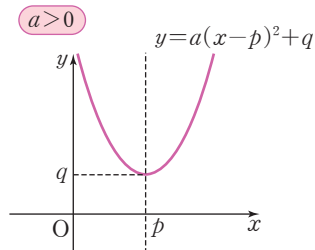
$$y=x^2 \xrightarrow[\text{2만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}} y=(x-2)^2 \xrightarrow[\text{3만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} y=(x-2)^2+3$$

투명 종이에 $y=x^2$의 그래프를 그린 후 투명 종이를 x축과 y축의 방향으로 차례로 평행이동한다.

따라서 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 이차함수 $y=(x-2)^2+3$의 그래프는 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 $(2,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

1. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

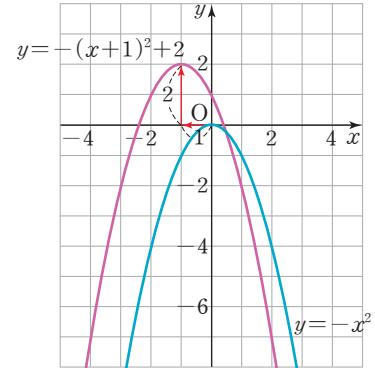
2. 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 x축과 y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

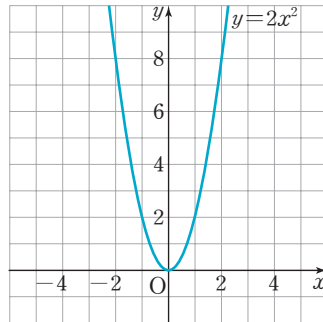
(1) $y=\frac{2}{3}(x-1)^2+4$

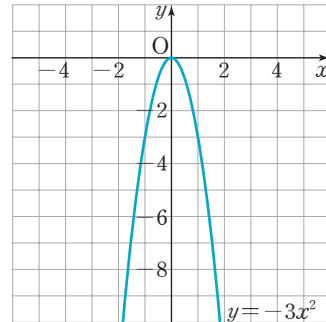
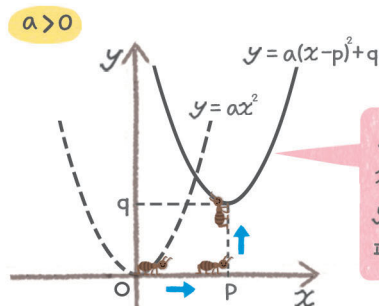
(2) $y=\frac{2}{3}(x+2)^2+5$

이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x+1)^2+2$의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이 | 이차함수 $y=-(x+1)^2+2$의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이차함수 $y=-(x+1)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-1$을 축으로 하고, 점 $(-1, 2)$를 꼭짓점으로 하는 위로 볼록한 포물선이다.

답 축의 방정식: $x=-1$, 꼭짓점의 좌표: $(-1, 2)$

문제 2 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=2(x-1)^2+2$

(2) $y=-3(x+2)^2-3$

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

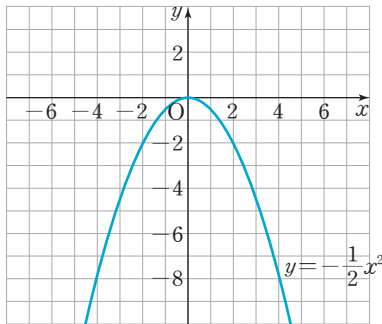
다음은 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에 대한 설명이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 □만큼, y축의 방향으로 □만큼 평행이동한 것이다.

(2) 직선 □를 축으로 한다.

(3) 꼭짓점의 좌표는 □이다.

2

아래 그림은 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+3$

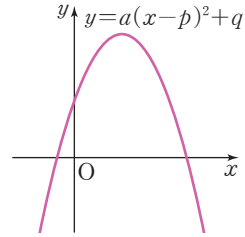
(2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2-1$

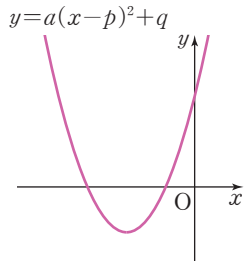
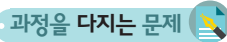
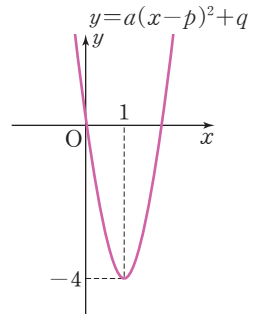
3

이차함수 $y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

4

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, p, q의 부호를 각각 구하시오.

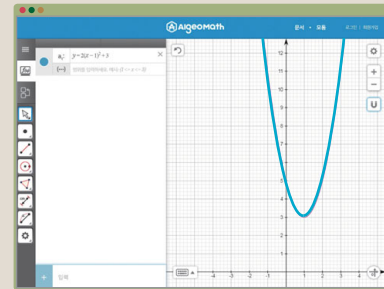
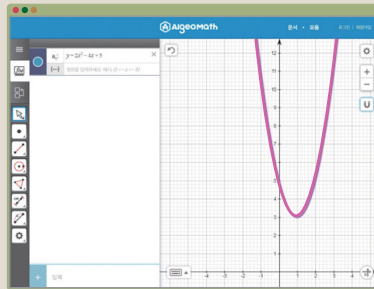
5 추론

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $y=q(x-a)^2+p$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

원점을 지나는 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, p, q의 값을 각각 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

4.7 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

학|습|목|표

• 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있다.
• 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 성질을 이해한다.

컴퓨터 프로그램을 이용한 이차함수의 그래프 관찰(4)

다음 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 두 이차함수 $y=2x^2-4x+5$와 $y=2(x-1)^2+3$의 그래프를 그린 것입니다. 두 이차함수 $y=2x^2-4x+5$와 $y=2(x-1)^2+3$의 그래프 사이의 관계를 생각해 봅시다.

활동 1 $y=2(x-1)^2+3$의 우변을 전개하여 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내 보자.

활동 2 **활동 1**의 결과를 이용하여 이차함수 $y=2x^2-4x+5$의 그래프는 어떻게 그리면 되는지 말해 보자.

생각 1 **이차함수 $y=2x^2-4x+5$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?**

생각 열기에서 $y=2(x-1)^2+3$의 우변을 전개하여 정리하면

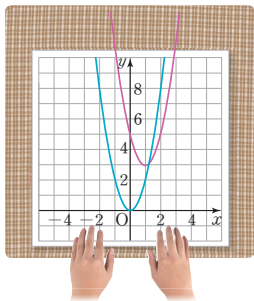
$$y=2x^2-4x+5$$

이다.

따라서 이차함수 $y=2x^2-4x+5$의 그래프는 그 식을 $y=2(x-1)^2+3$으로 고쳐서 그릴 수 있음을 알 수 있다.

한편, 이차함수 $y=2x^2-4x+5$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치는 과정은 다음과 같다.

$$y=2x^2-4x+5=2(x^2-2x+1-1)+5=2(x-1)^2+3$$

투명 종이에 $y=2x^2$의 그래프를 그린 후 투명 종이를 x축과 y축의 방향으로 차례로 평행이동한다.

따라서 이차함수 $y=2x^2-4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=2x^2-4x+5$의 그래프는 직선 $x=1$을 축으로 하고, 점 $(1,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다. 또, $x=0$일 때, $y=5$이므로 이 그래프는 점 $(0,\ 5)$를 지난다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

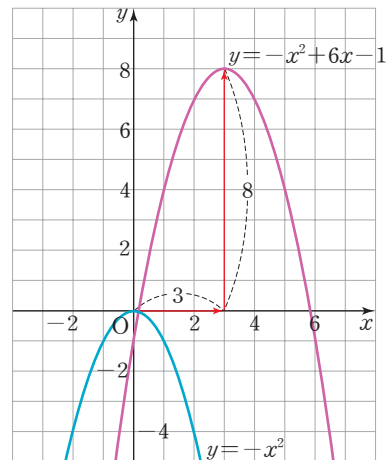
1. $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그릴 수 있다.
2. 점 $(0,\ c)$를 지난다.
3. $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

이차함수 $y=-x^2+6x-1$의 그래프를 그리고, 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이 | 이차함수 $y=-x^2+6x-1$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면

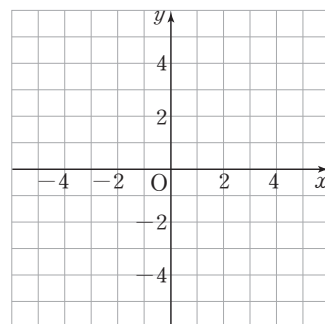
$$y=-x^2+6x-1$$
$$=-(x^2-6x+9-9)-1$$
$$=-(x-3)^2+8$$

이므로 이차함수 $y=-x^2+6x-1$의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이차함수 $y=-x^2+6x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 8)$이고, y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ -1)$인 위로 볼록한 포물선이다.

답 꼭짓점의 좌표: $(3,\ 8)$, y축과 만나는 점의 좌표: $(0,\ -1)$

문제 1 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$

(2) $y=-3x^2+6x-5$

예제 2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(1, 4)$일 때, 이 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

풀이 | 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 4)$이므로 이차함수의 식을

$$y=a(x-1)^2+4$$

로 나타낼 수 있다. 이 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $x=0$, $y=2$를 대입하면

$$2=a\times1+4, \text{ 즉 } a=-2$$

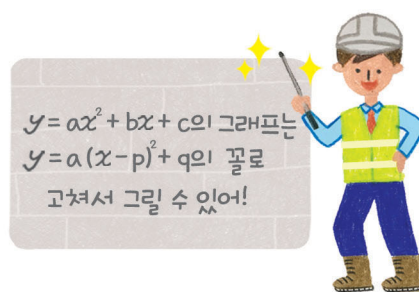
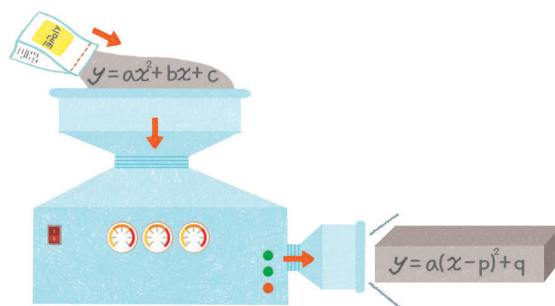
따라서 구하는 이차함수의 식은

$$y=-2(x-1)^2+4=-2(x^2-2x+1)+4$$
$$=-2x^2+4x+2$$

답 $y=-2x^2+4x+2$

문제 2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0, 7)$을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(3, -2)$일 때, 이 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

수학 집 짓기

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에 대한 설명이다. ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=$☐의 꼴로 고쳐서 그릴 수 있다.

(2) 점 (0, ☐)를 지난다.

(3) $a>0$이면 ☐로 볼록하고, $a<0$이면 ☐로 볼록한 포물선이다.

2

다음 이차함수를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치시오.

(1) $y=x^2-6x+5$

(2) $y=-x^2-4x+2$

(3) $y=2x^2+8x-1$

(4) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$

3

다음 보기에서 이차함수 $y=3x^2+12x-1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 (2, −13)이다.

ㄴ. 축은 직선 $x=-2$이다.

ㄷ. y축과 만나는 점의 좌표는 (0, −1)이다.

ㄹ. 제4사분면을 지나지 않는다.

4

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 (−1, 3)을 지나고 꼭짓점의 좌표가 (2, −6)일 때, 이 그래프가 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

5 추론

이차함수 $y=2x^2-4x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 일치하였다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

이차함수 $y=3x^2-6x-9$의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

집중 탐구

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 a, b, c의 부호

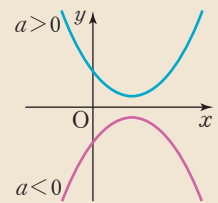
이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면

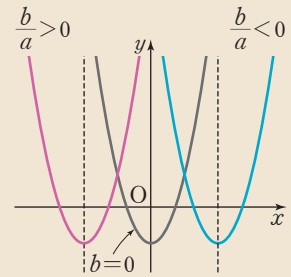
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

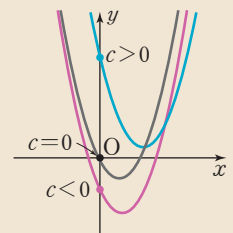
이므로 그래프의 축의 방정식, 꼭짓점의 좌표, y축과의 교점의 좌표는 다음과 같다.

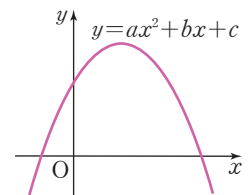
- 축의 방정식: $x=-\frac{b}{2a}$
- 꼭짓점의 좌표: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
- y축과의 교점의 좌표: $(0, c)$

❶ 그래프의 모양을 이용하여 a의 부호 알기

- 그래프가 아래로 볼록하다. ⇨ $a>0$
- 그래프가 위로 볼록하다. ⇨ $a<0$

❷ 그래프의 모양과 축의 위치를 이용하여 b의 부호 알기

- 축이 y축의 왼쪽에 있으면 $-\frac{b}{2a}<0$ ⇨ $\frac{b}{a}>0$
  즉, a와 b의 부호는 같다.
- 축이 y축이면 $-\frac{b}{2a}=0$이므로 $b=0$
- 축이 y축의 오른쪽에 있으면 $-\frac{b}{2a}>0$ ⇨ $\frac{b}{a}<0$
  즉, a와 b의 부호가 다르다.

❸ y축과의 교점의 위치를 이용하여 c의 부호 알기

- y축과의 교점이 x축의 위쪽에 있다. ⇨ $c>0$
- y축과의 교점이 원점이다. ⇨ $c=0$
- y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있다. ⇨ $c<0$

확인

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b, c의 부호를 각각 말해 보자.

단원 마무리

01

다음 보기에서 이차함수인 것을 모두 고르시오.

보기
ㄱ. $y=x(1-2x)$　　ㄴ. $y=x+3$
ㄷ. $y=(x-1)^2-x^2+7$　　ㄹ. $y=(x-3)(5x-2)$

02

다음 보기의 이차함수 중에서 그래프의 폭이 가장 좁은 것부터 차례로 나열하시오.

보기
ㄱ. $y=-4x^2$　　ㄴ. $y=\frac{1}{2}x^2$
ㄷ. $y=x^2$　　ㄹ. $y=-\frac{1}{3}x^2$

03

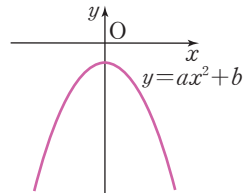
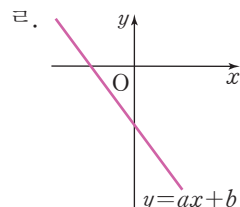
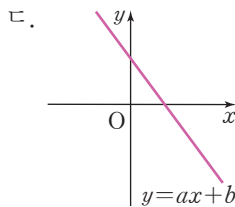
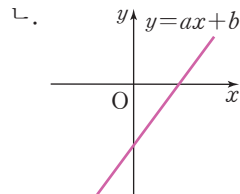
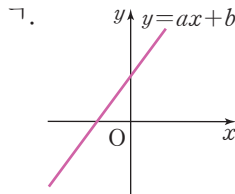
이차함수 $y=-3x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프가 점 $(a,\ -9a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$)

04

다음 보기에서 이차함수 $y=3x^2+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

보기
ㄱ. 아래로 볼록한 포물선이다.
ㄴ. y축에 대칭이다.
ㄷ. 제3사분면을 지난다.
ㄹ. $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.
ㅁ. x축보다 항상 위쪽에 있다.

05

이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 보기에서 일차함수 $y=ax+b$의 그래프로 알맞은 것을 고르시오.

보기

06

다음 보기의 이차함수 중에서 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것을 모두 고르시오.

보기
ㄱ. $y=3x^2-1$　　ㄴ. $y=3(x+2)^2$
ㄷ. $y=-\frac{4}{5}(x+1)^2+2$　　ㄹ. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2+2$

07

이차함수 $y=-2x^2+12x-5$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하는 x의 값의 범위를 구하시오.

08

다음 보기의 이차함수 중에서 그래프를 평행이동하여 서로 겹치는 것끼리 짝 지으시오.

보기

ㄱ. $y=10x-3x^2$ ㄴ. $y=\frac{1}{4}x^2-x+5$

ㄷ. $y=2x(5+x)$ ㄹ. $y=2x^2-5x+2$

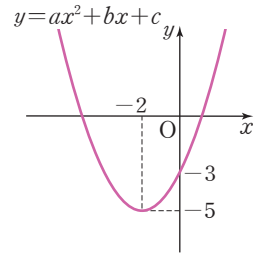
09 서술형

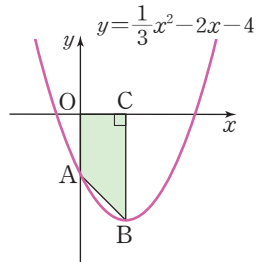
이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=-2x^2-12x-16$의 그래프와 일치하였다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

10

이차함수 $y=3x^2+ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, -2)$일 때, 이 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 구하시오. (단, a, b는 상수)

11 서술형

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

12

오른쪽 그림은 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2-2x-4$의 그래프이다. y축과의 교점을 A, 꼭짓점을 B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, □OABC의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)

13

이차함수 $y=-x^2-2ax+a-1$의 그래프는 $x<2$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x>2$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 이때 이 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하시오. (단, a는 상수)

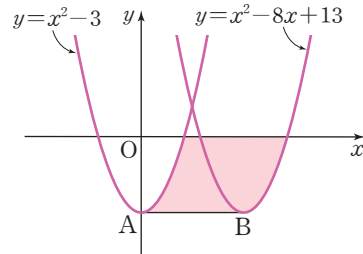
문제 해결

14

이차함수 $y=ax^2-2ax+b$의 그래프의 꼭짓점이 일차함수 $y=-2x+10$의 그래프 위에 있고, 두 그래프는 x축 위에서 만난다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

창의 UP

15

다음 그림과 같이 두 이차함수 $y=x^2-3$과 $y=x^2-8x+13$의 그래프의 꼭짓점을 각각 A, B라고 할 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

자기 평가

점검 항목		도달 정도		
		미흡	보통	우수
학습 내용	이차함수의 뜻을 알고 있는가?			
	이차함수 $y=x^2$, $y=-x^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하였는가?			
	이차함수 $y=ax^2$, $y=ax^2+q$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하였는가?			
	이차함수 $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하였는가?			
	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하였는가?			
학습 태도	수업 시간에 성실히 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			
	친구의 의견을 존중하고 경청하였는가?			

● 이 단원을 공부하면서 알게 된 점과 어려웠던 점은 무엇인지 써 보자.

창의+융합 프로젝트

자동차의 정지 거리

수학+과학

운전자가 정지할 상황을 인식한 순간부터 자동차가 완전히 멈출 때까지 자동차가 진행한 거리를 자동차의 정지 거리라고 한다. 정지 거리는 공주 거리와 제동 거리의 합으로 공주 거리는 운전자가 위험을 느끼고 브레이크를 작동하기까지 자동차가 간 거리이며, 제동 거리는 브레이크가 작동한 순간부터 자동차가 멈출 때까지 간 거리이다.

1 과제

마찰력의 크기가 일정한 도로를 자동차가 달릴 때, 제동 거리는 자동차의 속력의 제곱에 비례한다. 마찰력의 크기가 일정한 도로를 자동차가 시속 x km로 달릴 때의 제동 거리를 y m라고 할 때, x와 y 사이에 다음 표와 같은 관계가 성립한다고 하자. 물음에 답해 보자.

x(km/h)	8	16	24	32	40	⋯
y(m)	0.5	2	4.5	8	12.5	⋯

(1) x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내 보자.

(2) 이 자동차를 운전자가 시속 80 km로 운전하다가 위험을 느끼고 브레이크를 밟을 때까지 1초가 걸렸다고 할 때, 이 자동차의 정지 거리는 72.4 m가 된다. 이를 설명해 보자. (단, 시속 1 km는 초속 0.28 m로 계산한다.)

2 1의 (1)에서 구한 식을 $y=f(x)$라고 할 때, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 그 그래프를 그려 보자.

포트폴리오 평가

• 이 단원을 학습한 후 스스로 해결하기 및 단원 마무리 문제 해결, 자기 평가 작성, 창의+융합 프로젝트 과제 해결 등 모든 활동 결과를 확인하고 점검하였는가?